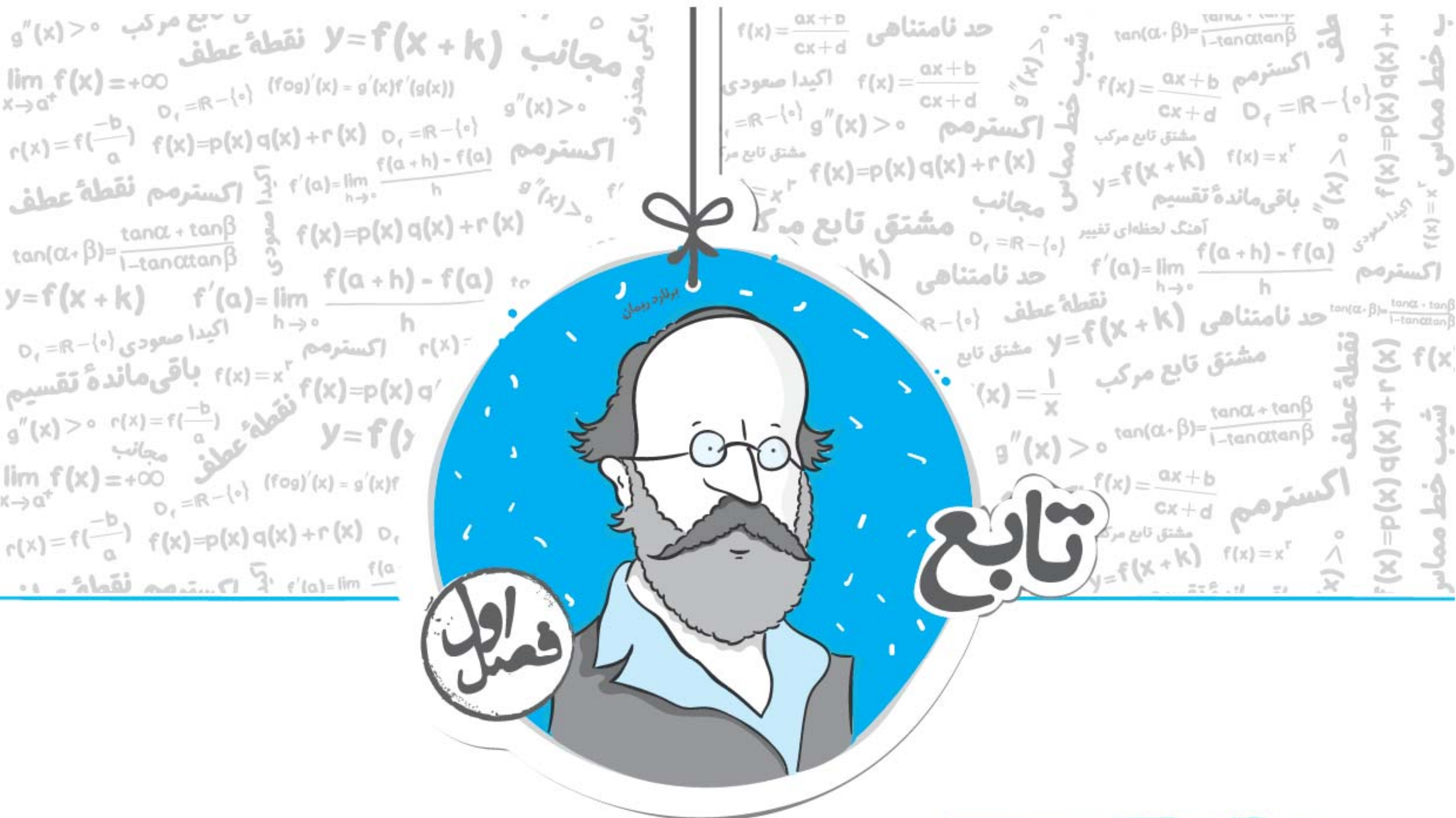
فهرست



۱ تبدیل نمودار توابع

اول به نام خدا. رسم خیلی از تابع‌ها آن هم در سطح دبیرستان اصلاً سخت نیست یعنی اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، با یک سری تبدیل‌ها می‌توان نمودار تابع‌های زیادی را رسم کرد.

گام اول: انتقال‌های عمودی و افقی

پارسال و پیارسال (*دو سال پیش*) با یک سری تبدیل آشنا شدید و چون پیش‌نیاز درس‌های جدیدند، بد نیست یادی از آن‌ها کنیم. (*البته کتاب ۱۲اُم هم بهش اشاره کرده.*)

نمودار تابع $y = f(x)$ را داریم:

الف) $y = f(x) + k$

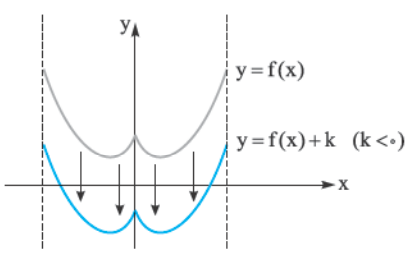
این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

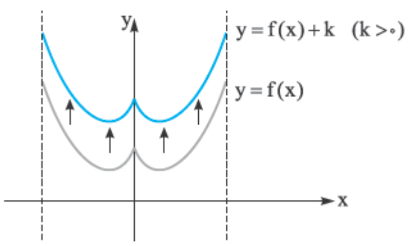
۱) $k > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد بالا می‌بریم

۲) $k < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد پایین می‌بریم

کتاب درسی به این انتقال، **انتقال عمودی** می‌گوید.

برای مثال به نمودارهای زیر توجه کنید:





همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند. (*انتقال عمودیه*) ولی برد تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ (برد f) باشد، آن‌گاه $R_{f(x)+k} = [a + k, b + k]$ است.

پ) $y=f(x+k)$

این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

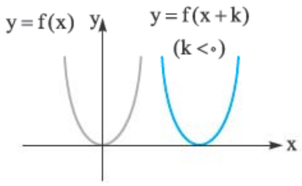
۱) $k>0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد چپ می‌بریم

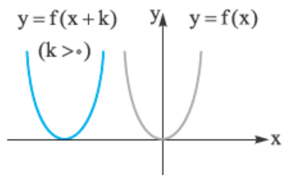
۲) $k<0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد راست می‌بریم

مثلاً $f(x-2)$، دو واحد نسبت به $f(x)$ به سمت راست می‌رود و $f(x+1)$، یک واحد نسبت به $f(x)$ به سمت چپ می‌رود *(برعکسه)*.

کتاب درسی به این انتقال، **انتقال افقی** می‌گوید.

برای مثال به نمودارهای زیر توجه کنید:





همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، برد تابع تغییری نمی‌کند *(انتقال افقیه دیگه)* ولی دامنهٔ تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $D_{f(x+k)}=[a-k,b-k]$ است. *(چرا این‌جوری نگاه می‌کنید؟؟؟ گفتم که برعکسه)*

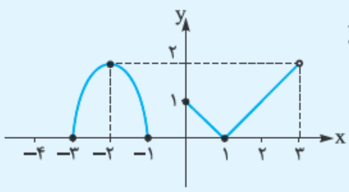
توجه خیلی وقت‌ها ممکن است در یک تابع، هم تغییرات افقی و هم عمودی داشته باشیم، مثلاً:

$$y=f(x+\underbrace{\square}_{\text{تغییر افقی}})+\Delta \rightarrow \text{تغییر عمودی}$$

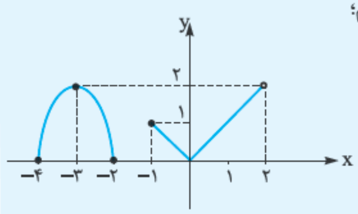
برای رسم این تابع‌ها از روی $y=f(x)$ اول تغییر افقی ($\square$) و بعد تغییر عمودی (Δ) را اعمال کنید. *(البته فرقی نداره‌ها!!!! واسه این‌که گیج نشید می‌گم)*.

مثال و پاسخ

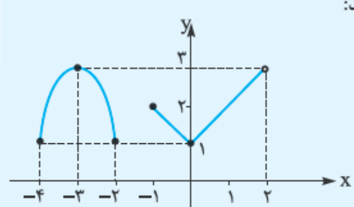
مثال **نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک انتقال، نمودار تابع $y=f(x+1)+1$ را رسم کنید.**



پاسخ ابتدا نمودار $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، پس نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم؛ یعنی:



حالا نمودار $f(x+1)$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y=f(x+1)+1$ به دست آید:

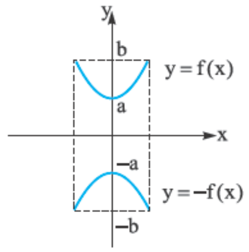


از مطالبی که در سال‌های قبل یاد گرفتید، دو تبدیل بسیار مهم و پرکاربرد $-f(x)$ و $f(-x)$ باقی‌مانده است. این دو را هم بگوییم و برویم سراغ تبدیل‌های جدید.

گام دوم: رسم $f(x)$- و $f(-x)$ از روی $f(x)$

نمودار $y=f(x)$ را داریم:

الف) $y=-f(x)$

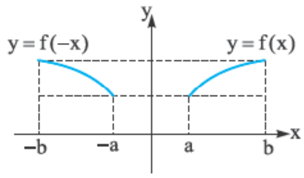


برای رسم این تابع از روی $f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

واضح است که دامنهٔ f و $-f$ با هم برابرند ولی محدودهٔ برد به صورت زیر تغییر می‌کند.

اگر $R_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $R_{-f(x)}=[-b,-a]$ است. *(نمودار رو ببینید.)*

ب) $y=f(-x)$



برای رسم این تابع از روی $f(x)$، این بار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

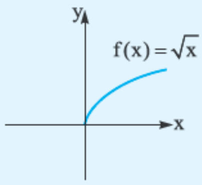
همان‌طور که از روی نمودار می‌بینید برد $f(x)$ و $f(-x)$ با هم برابرند ولی محدودهٔ دامنه به صورت زیر تغییر می‌کند.

اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $D_{f(-x)}=[-b,-a]$ است.

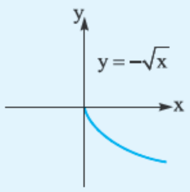
مثال و پاسخ

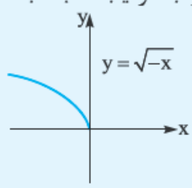
مثال از روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع‌های $-f(x)$ و $f(-x)$ را رسم کنید.

پاسخ می‌دانیم که نمودار $\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



برای رسم $-f(x)$ و $f(-x)$، نمودار $f(x)$ را به ترتیب نسبت به محور xها و محور yها قرینه می‌کنیم. ببینید:





گام سوم: انبساط و انقباض عمودی

نمودار $y=f(x)$ را داریم:

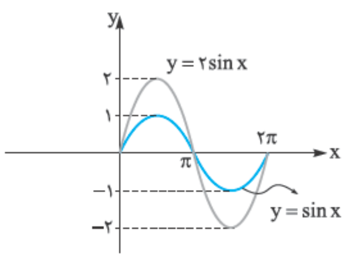
$y=kf(x)$

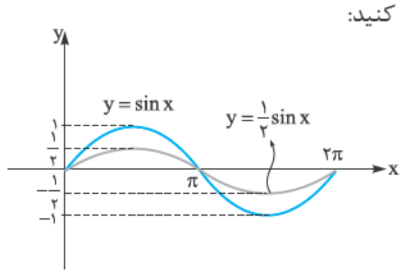
برای رسم این تابع از روی $y=f(x)$، عرضِ تابع f را در k ضرب می‌کنیم *(دامنه ثابته)* و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) $k>1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور yها با ضریب k کشیده می‌شود (انبساط عمودی)

۲) $0<k<1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور yها با ضریب k فشرده می‌شود (انقباض عمودی)

به مثال مقابل توجه کنید:





نگاه کنید! $2\sin x$ نسبت به $\sin x$ کشیده‌تره ولی $\frac{1}{2}\sin x$ نسبت به $\sin x$ فشرده‌تره.

همان‌طور که می‌بینید، دامنهٔ تابع $kf(x)$ تغییر نمی‌کند ولی برد تابع، k برابر می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $R_{kf(x)}=[ak,bk]$ است.

آقا اجازه! اگر بخواهیم از روی نمودار $f(x)$، مثلاً نمودار $-2f(x)$ را رسم کنیم چی؟

خب، اول $2f(x)$ را رسم می‌کنیم (نمودار f کشیده‌تر می‌شود) و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

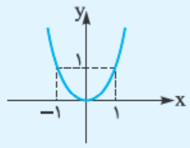
مثال و پاسخ

مثال **به کمک نمودار $y=x^2$، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.**

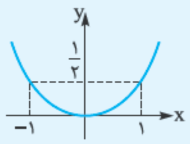
الف) $y=\frac{1}{2}x^2$ ب) $y=-2x^2$

پاسخ

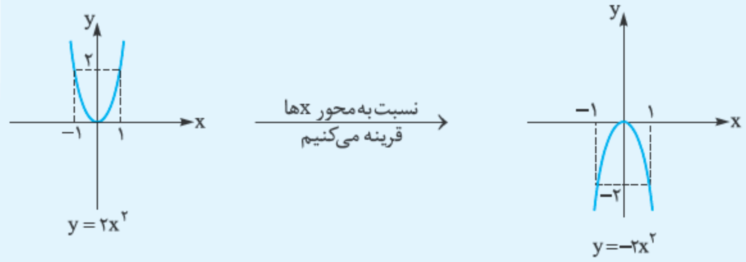
می‌دانیم نمودار $y=x^2$ به صورت مقابل است:



الف برای رسم $y=\frac{1}{2}x^2$ باید نمودار x^2، در راستای محور yها فشرده‌تر شود *(ذهن نمودار بازتر میشه.)*



ب برای رسم $y=-2x^2$، ابتدا $y=2x^2$ را از روی x^2 رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ببینید:



گام چهارم: انبساط و انقباض افقی

نمودار $y=f(x)$ را داریم:

$y=f(kx)$

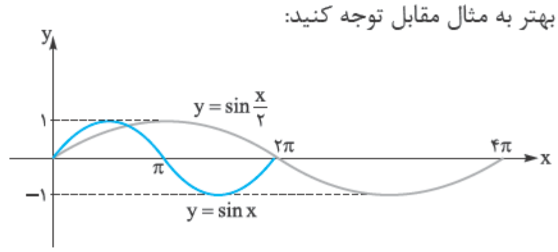
برای رسم این تابع از روی $y=f(x)$، طولِ نمودار f را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم *(برد ثابته)* و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

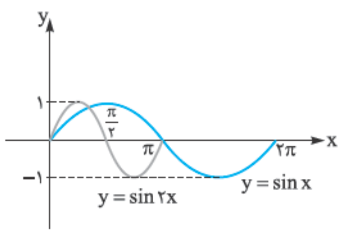
۱) $k>1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی)

۲) $0<k<1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی)

تذکر بچه‌ها توجه کنید که وقتی تغییرات روی x است ($f(x+k)$ یا $f(kx)$) برعکس عمل می‌کنیم.

برای فهم بهتر به مثال مقابل توجه کنید:





مشاهده می‌کنید نمودار $y=\sin\frac{x}{2}$ ($k=\frac{1}{2}$) از همه کشیده‌تر و نمودار $y=\sin 2x$ ($k=2$) از همه فشرده‌تر است. *(گفتم که تغییر روی x برعکسه)*

همان‌طور که می‌بینید برد تابع $f(kx)$ تغییری نمی‌کند ولی دامنهٔ تابع $f(kx)$ تغییر می‌کند. *(فعلاً k رو مثبت می‌گیریم.)*

پس اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، $D_{f(kx)}=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ می‌شود.

بچه‌ها یک سؤال! اگر بخواهیم از روی نمودار $f(x)$، مثلاً $f(-۲x)$ را رسم کنیم چی؟؟؟

بگذارید خودم جواب بدهم. مثل حالت‌های قبل، ابتدا $f(۲x)$ را رسم می‌کنیم و سپس $f(۲x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

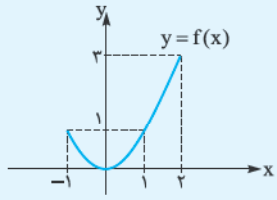
خُب! کم‌کم به انتهای این درس نزدیک می‌شویم. تا حالا همهٔ حالت‌های تبدیل (چه عمودی و چه افقی) را گفتم. الان نوبت به این می‌رسد، که این تبدیل‌ها را با هم مخلوط کنیم و نمودارهای پیچیده‌تری را رسم کنیم. *(خیلی از بچه‌ها در رسم این نمودارها دچار مشکل می‌شوند.)*

توجه برای رسم تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی $y=f(x)$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)}y=f(x+c)\xrightarrow{(۲)}y=f(bx+c)\xrightarrow{(۳)}y=af(bx+c)\xrightarrow{(۴)}y=af(bx+c)+d$$

مثال و پاسخ

مثال **نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودارهای خواسته‌شده را به دست آورید.**

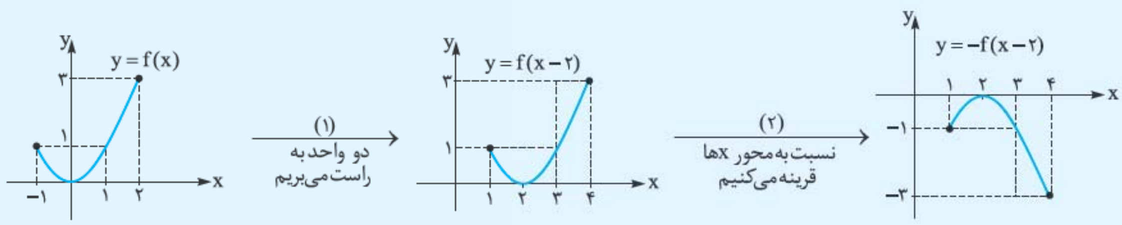


الف) $-f(x-۲)$

ب) $f(-x-۲)$

پاسخ **الف** برای رسم $-f(x-۲)$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

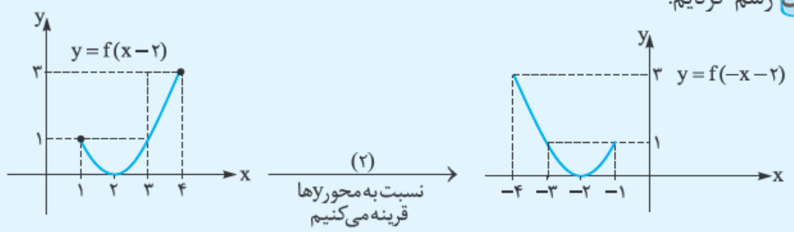
$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)}y=f(x-۲)\xrightarrow{(۲)}y=-f(x-۲)$$



ب برای رسم $f(-x-۲)$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)}y=f(x-۲)\xrightarrow{(۲)}y=f(-x-۲)$$

نمودار $f(x-۲)$ را در قسمت **الف** رسم کردیم:



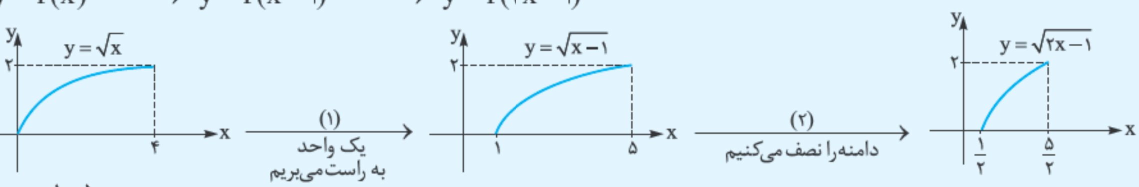
تذکر بچه‌ها حواستان باشد که مثلاً قرینهٔ $f(x+۱)$ نسبت به محور yها $f(-x+۱)$ است نه $f(-x-۱)$؛ یعنی فقط باید خود x را به −x تبدیل کنید.

مثال و پاسخ

مثال **به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۰,۴]$، نمودار $f(۲x-۱)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.**

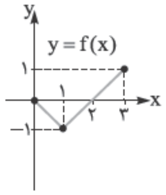
پاسخ برای رسم نمودار تابع $f(۲x-۱)$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)}y=f(x-۱)\xrightarrow{(۲)}y=f(۲x-۱)$$

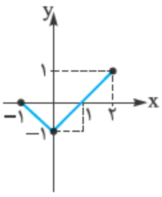


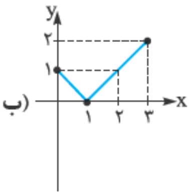
پس دامنه و برد تابع $f(۲x-۱)$ برابر است با: $D=[\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]\ ,\ R=[۰,۲]$

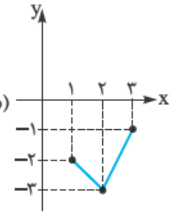
سؤال‌های امتحانی

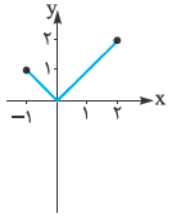


۱- با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام‌یک از ضابطه‌های داده‌شده می‌باشد؟

الف) 

ب) 

پ) 

ت) 

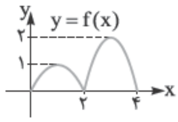
۱) $f(x)+۱$ ۲) $f(x+۱)+۱$ ۳) $f(x+۱)$ ۴) $f(x-۱)-۲$

۲- با رسم نمودار تابع $f(x)=۲^x$ در بازهٔ $[-۱,۱]$، نمودار هر یک از تابع‌های خواسته‌شده را رسم کنید.

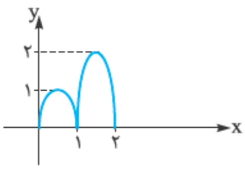
پ) $y=f(x+۲)-۱$ ب) $y=f(x)-۱$ الف) $y=f(x+۲)$

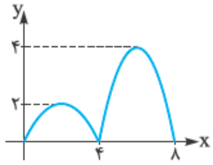
۳- به کمک نمودار تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $[-۱,۱]$، نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

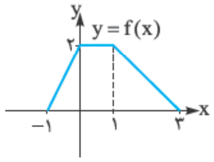
پ) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)$ ب) $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ الف) $y=۲f(x)$



۴- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، ضابطهٔ هر یک از نمودارهای داده‌شده را برحسب $f(x)$ به دست آورید.

الف) 

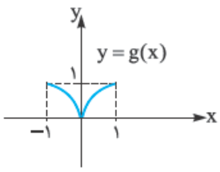
ب) 



۵- به کمک نمودار تابع f، نمودار سایر تابع‌های خواسته‌شده را رسم کنید.

ب) $f(-x)$ الف) $-f(x)$

ت) $۲f(-\frac{۱}{۲}x)$ پ) $-۲f(-x)$



۶- با توجه به نمودار g، نمودار تابع‌های خواسته‌شده را رسم کنید.

الف) $g(۲x-۱)$

ب) $g(-x+۱)$

پ) $۲g(۳-x)$

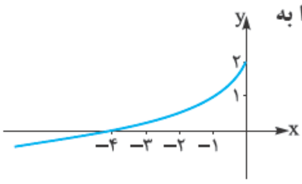
۷- تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۳ & -۱<x<۱\\ x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

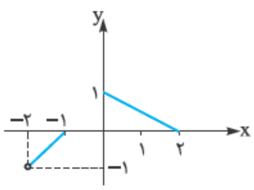
الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع $y=۲f(-x-۱)-۱$ را به کمک نمودارش پیدا کنید.

۸- اگر نقطهٔ $A(-۲,۱)$ روی تابع $f(x)$ باشد، مختصات نقطهٔ A را روی تابع $y=\frac{-۱}{۳}f(x-۲)$ به دست آورید.

۹- نمودار تابع مقابل، با استفاده از تبدیل نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را به دست آورید.





۱۰- نمودار تابع $y=-f(-۲x)+۱$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.

۱۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-1,4]$ و برد آن $[2,5]$ باشد، دامنه و برد دو تابع $y = 3f(x+1)$ و $y = 2 - f(2x-1)$ را به دست آورید.

۱۲- به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$، نمودار تابع $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ را رسم کنید و در آخر دامنه و برد آن را پیدا کنید.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

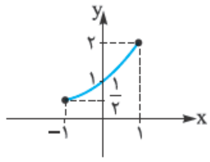
۱- الف) در این قسمت نمودار تابع f، یک واحد به سمت چپ آمده ولی برد تابع هیچ تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x+۱)$ است. *(تغییر روی x برعکسه.)*

ب) در این قسمت نمودار تابع f، یک واحد بالا آمده است ولی دامنه تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x)+۱$ است.

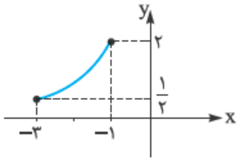
پ) *قب!* با کمی دقت متوجه می‌شویم که نمودار یک واحد به راست و دو واحد پایین آمده پس این تابع، $f(x-۱)-۲$ است.

ت) نمودار یک واحد به چپ آمده و یک واحد هم بالا؛ یعنی این تابع، $f(x+۱)+۱$ است.

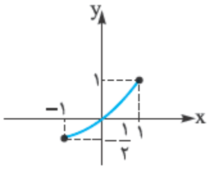
۲- نمودار تابع $f(x)=۲^x$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ به صورت مقابل است:



الف) برای رسم $f(x+۲)$، $f(x)$ را دو واحد به چپ می‌بریم:

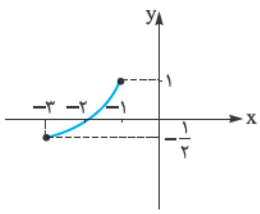


ب) برای رسم $f(x)-۱$، $f(x)$ را یک واحد پایین می‌بریم:

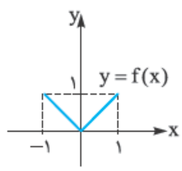


همان‌طور که می‌بینید، وقتی نمودار یک واحد پایین می‌آید از مبدأ مختصات می‌گذرد.

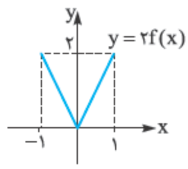
پ) برای رسم تابع $y=f(x+۲)-۱$، ابتدا دو واحد $f(x)$ را به سمت چپ می‌بریم و در نهایت یک واحد پایین می‌آوریم. *(مخلوطی از حالت‌های الف و ب)*



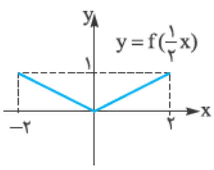
۳- ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را در بازهٔ $[-۱,۱]$ رسم می‌کنیم:



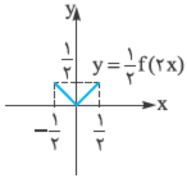
الف) برای رسم $۲f(x)$، برد تابع را دو برابر می‌کنیم *(دامنه ثابته)*. ببینید:



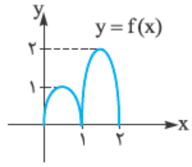
ب) برای رسم $f(\frac{۱}{۲}x)$، دامنهٔ تابع را دو برابر می‌کنیم *(تغییرات روی x برعکسه)* و البته برد تابع تغییری نمی‌کند.



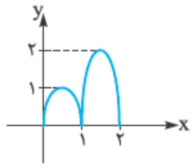
پ) در این قسمت باید $\frac{۱}{۲}f(۲x)$ را رسم کنیم؛ پس دامنه و برد تابع را نصف می‌کنیم. ببینید:



۴- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است:



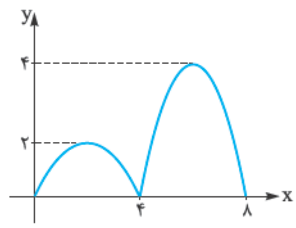
الف) به نموداری که در این قسمت رسم شده است نگاه کنید:



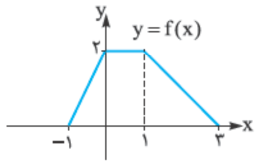
همان‌طور که می‌بینید برد تابع جدید تغییری نکرده و فقط دامنهٔ تابع نصف شده پس ضابطهٔ این تابع $y=f(۲x)$ است. (*توروخدا نگید* $f(\frac{۱}{۲}x)$)

ب) به نمودار مقابل توجه کنید:

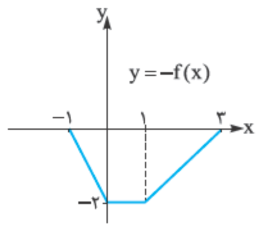
دامنه و برد تابع دو برابر شده، پس ضابطهٔ این تابع برحسب $f(x)$ می‌شود: $y=۲f(\frac{۱}{۲}x)$



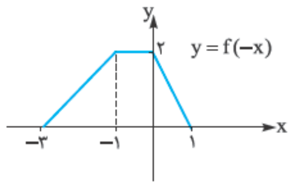
۵- نمودار f به صورت مقابل است:



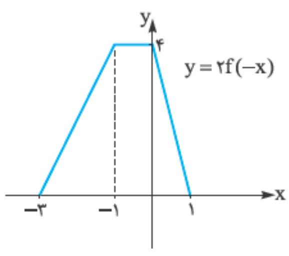
الف) برای رسم $-f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، ببینید:



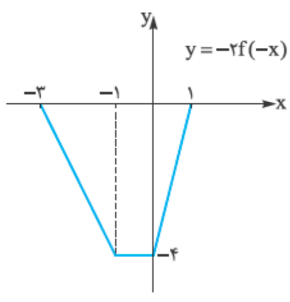
ب) برای رسم $f(-x)$، این بار نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



پ) برای رسم $-۲f(-x)$ باید برد $f(-x)$ (نمودار قسمت (ب)) را دو برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



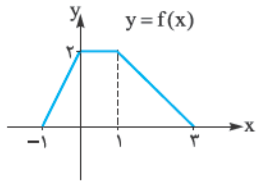
$\xrightarrow{\text{نسبت به محور x‌ها قرینه می‌کنیم}}$



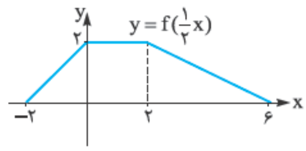
ت) برای رسم $2f(\frac{-1}{2}x)$ باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(\tfrac{1}{2}x)\xrightarrow{(2)}y=f(-\tfrac{1}{2}x)\xrightarrow{(3)}y=2f(-\tfrac{1}{2}x)$$

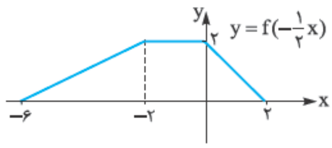
ببینید:



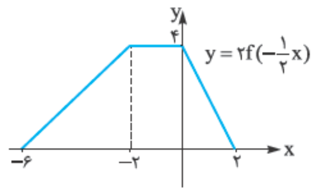
(۱) دامنه را دو برابر می‌کنیم



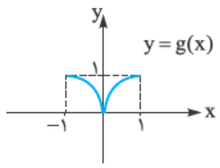
(۲) نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم



(۳) برد تابع را دو برابر می‌کنیم



۶- نمودار تابع g به صورت مقابل است:

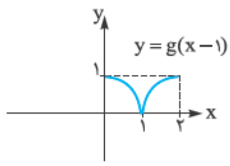


الف) برای رسم $g(2x-1)$ به ترتیب، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$g(x)\xrightarrow{(1)}g(x-1)\xrightarrow{(2)}g(2x-1)$$

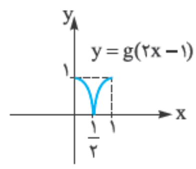
$g(x)$ را که داریم، پس $g(x-1)$ را به دست می‌آوریم:

(۱) g را یک واحد به راست می‌بریم



برای رسم $g(2x-1)$ از روی $g(x-1)$:

(۲) دامنهٔ تابع را نصف می‌کنیم

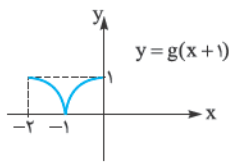


ب) برای رسم $g(-x+1)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=g(x)\xrightarrow{(1)}y=g(x+1)\xrightarrow{(2)}y=g(-x+1)$$

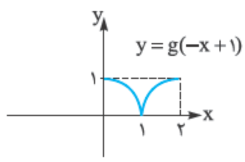
برویم سروقتِ رسم $g(x+1)$:

(۱) g را یک واحد به چپ می‌بریم



برای رسم $g(-x+1)$ از روی $g(x+1)$:

(۲) نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم

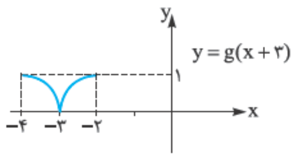


پ) مراحل رسم $y=۲g(-x+۳)$ از روی g به صورت زیر است:

$$y=g(x)\xrightarrow{(۱)}y=g(x+۳)\xrightarrow{(۲)}y=g(-x+۳)\xrightarrow{(۳)}y=۲g(-x+۳)$$

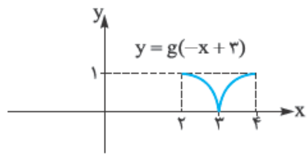
برای رسم $g(x+۳)$:

(۱)
g را سه واحد به چپ می‌بریم



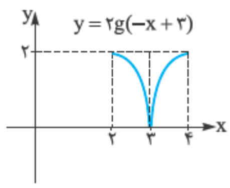
رسم $g(-x+۳)$ از روی $g(x+۳)$:

(۲)
نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم

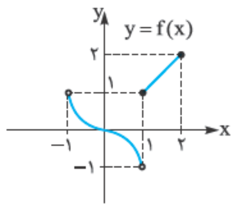


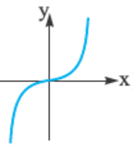
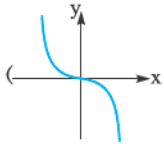
و در نهایت برای رسم $۲g(-x+۳)$:

(۳)
برد تابع را دوبرابر می‌کنیم



۷- الف) نمودار f به صورت مقابل است:



تنها قسمت دشوار رسم f، این‌جاست که باید $-x^۳$ رسم شود که می‌دانیم $x^۳$ به صورت () است *(واسه این‌که خیالتون راحت شه، چنتا نقطه بهش بدین)*، پس برای رسم $-x^۳$ باید $x^۳$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم. ()

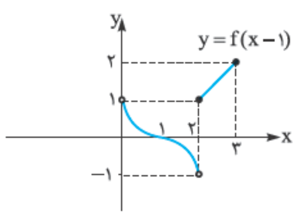
همچنین با توجه به نمودار f داریم: $D_f=(-۱,۲]$ ، $R_f=(-۱,۲]$

ب) برای رسم تابع $y=۲f(-x-۱)-۱$ از روی f باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)}y=f(x-۱)\xrightarrow{(۲)}y=f(-x-۱)\xrightarrow{(۳)}y=۲f(-x-۱)\xrightarrow{(۴)}y=۲f(-x-۱)-۱$$

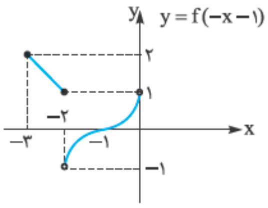
رسم $f(x-۱)$:

(۱)
f را یک‌واحد به راست می‌بریم



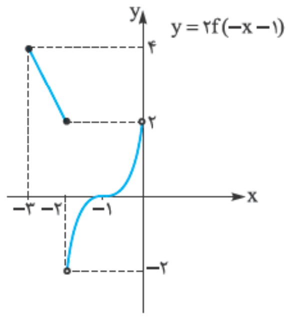
برای رسم $f(-x-۱)$ از روی $f(x-۱)$:

$\xrightarrow[\text{نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم}]{(۲)}$

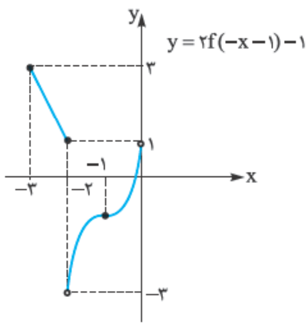


برای رسم $۲f(-x-۱)$ از روی نمودار $f(-x-۱)$:

$\xrightarrow[\text{برد تابع را دوبرابر می‌کنیم}]{(۳)}$



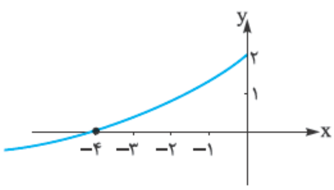
و در گام آخر، نمودار رسم‌شده را یک واحد پایین می‌بریم:



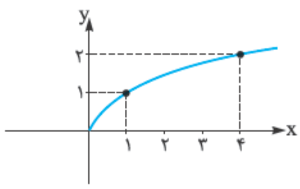
از روی نمودار تابع $y = ۲f(-x-۱) - ۱$ می‌توان نوشت: $D = [-۳, ۰)$ ، $R = (-۳, ۳]$

۸- رسم تابع $y = \frac{-۱}{۳}f(x-۲)$ از روی $f(x)$ به این صورت است که اول $f(x-۲)$ را رسم می‌کنیم و سپس برد آن را $\frac{-۱}{۳}$ برابر می‌کنیم. پس اگر $A(-۲, ۱)$ روی $f(x)$ باشد تبدیل‌یافتهٔ A روی تابع $f(x-۲)$ می‌شود $A'(۰, ۱)$ (باید $f(x)$ دو واحد به راست برود) و سپس نقطهٔ موردنظر در تابع $y = \frac{-۱}{۳}f(x-۲)$ به صورت $A''(۰, -\frac{۱}{۳})$ می‌شود. (این‌بار دامنه ثابت است و فقط برد را در $-\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم.)

۹- باید ضابطهٔ نمودار مقابل را برحسب $f(x) = \sqrt{x}$ پیدا کنیم.



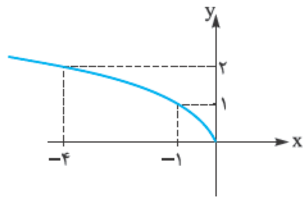
به نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ نگاه کنید:



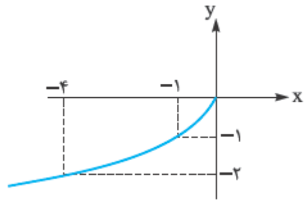
چه‌طوری می‌توانیم از $f(x)=\sqrt{x}$ به ضابطهٔ نمودار خواسته‌شده برسیم؟

با کمی دقت می‌توان فهمید که باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) ابتدا نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم یعنی: $y=\sqrt{-x}$

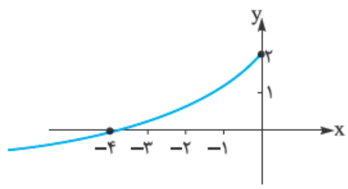


۲) باید $\sqrt{-x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ یعنی: $y=-\sqrt{-x}$



۳) و در گام آخر $-\sqrt{-x}$ را ۲ واحد بالا می‌بریم؛ یعنی: $y=-\sqrt{-x}+2$

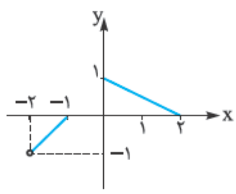
که نمودارش به صورت مقابل است:



پس $y=-\sqrt{-x}+2$ ضابطهٔ نمودار خواسته‌شده است.

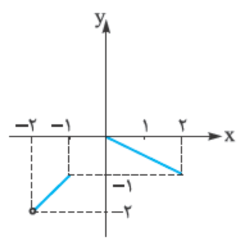
اگر کمی برات سفته، مجدداً نیم نگاهی به درس‌نامه بنداز چون این سؤال خیلی مهمه.

۱۰- سؤال بسیار مهمی است. نمودار تابع $y=-f(-2x)+1$ به صورت مقابل است:

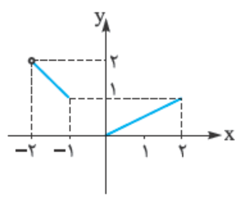


این بار فرق دارد، باید دنبال خود $f(x)$ بگردیم. پس باید همهٔ مراحل را به صورت برعکس انجام دهیم.

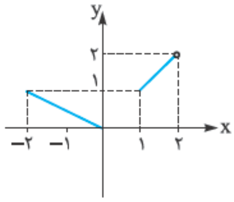
۱) اول $y=-f(-2x)+1$ را یک واحد پایین می‌آوریم تا $y=-f(-2x)$ به دست آید.



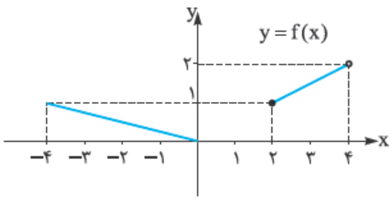
۲) حالا باید از روی $y=-f(-2x)$ به $y=f(-2x)$ برسیم یعنی نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ببینید:



۳) می‌خواهیم از $f(-۲x)$ به $f(۲x)$ برسیم پس نمودار $y=f(-۲x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



۴) و در گام آخر باید از $f(۲x)$ به $f(x)$ برسیم، پس دامنهٔ $f(۲x)$ را ۲ برابر می‌کنیم *(برعکسه)*:



از روی نمودار $f(x)$ می‌توان نوشت: $D_{f(x)}=[-۴,۰]\cup[۲,۴)\ ,\ R_{f(x)}=[۰,۲)$

۱۱- دامنه و برد تابع f به صورت مقابل است: $D_f=[-۱,۴]\ ,\ R_f=[۲,۵]$

اول دامنه و برد $y=۳f(x+۱)$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید:

برای رسم $۳f(x+۱)$ از روی $f(x)$، f را یک واحد به چپ می‌بریم و سپس برد تابع را ۳ برابر می‌کنیم؛ یعنی:

$$D=[-۲,۳]\ ,\ R=[۶,۱۵]$$

حالا تابع $y=۲-f(۲x-۱)$:

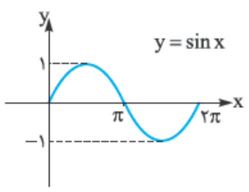
می‌دانیم برای رسم این تابع، ابتدا نمودار را یک واحد به راست می‌بریم و سپس دامنه را نصف می‌کنیم؛ یعنی:

$$D=[\frac{-۱+۱}{۲},\frac{۴+۱}{۲}]=[۰,\frac{۵}{۲}]$$

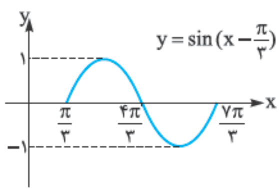
همچنین برای تعیین برد این تابع ابتدا R_f را قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به آن اضافه می‌کنیم:

(اول میشه $[-۵,-۲]$ بعد $[-۳,۰]$) $R=[-۳,۰]$

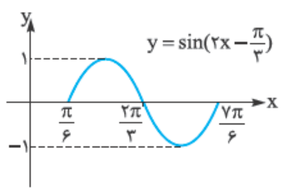
۱۲- نمودار تابع $y=\sin x$ به صورت مقابل است:



همان‌طور که می‌دانید برای رسم $y=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$ ابتدا $\sin(x-\frac{\pi}{۳})$ را رسم می‌کنیم؛ یعنی نمودار $\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به راست می‌بریم:



در نهایت برای رسم $y=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$ از روی $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$ دامنهٔ نمودار را نصف می‌کنیم:



حالا طبق نمودار می‌توان نوشت: $D=[\frac{\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶}]\ ,\ R=[-۱,۱]$